

文章编号: 1000-8055(2005)04-0584-06

# 纤维位置随机引起的复合材料性能分散性研究

高希光, 宋迎东, 孙志刚

(南京航空航天大学 能源与动力学院, 北京 210016)

**摘要:** 采用Monte-Carlo方法分别用均匀分布和正态分布模拟复合材料纤维中心位置的随机变化, 得到材料截面图像。然后用像素对材料截面图进行网格划分, 作为通用单胞模型的输入, 计算出复合材料性能的子样。最后用数理统计的方法处理数据得到材料性能的统计特性数据。分析结果表明: 本文采用的模拟方法是合理有效的。由纤维位置变化引起的材料分散性随纤维体积比的变化先增大然后减小。三参数威布尔分布和正态分布较好地描述了各个弹性参数的分布。

**关键词:** 航空、航天推进系统; 复合材料; GMC改进算法; Monte-Carlo方法; 有效性能

**中图分类号:** TB33

**文献标识码:** A

## Research on the Discrepancy of Composite Effective Properties Induced by the Stochastic Fiber Location

GAO Xi-guang, SONG Ying-dong, SUN Zhi-gang

(College of Energy and Power Engineering,

Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

**Abstract:** Based on Monte-Carlo method, uniform simulation and Gaussian simulation were used to simulate the stochastic fiber location. The digital images of the material cross-section were generated by the simulation method. Grids were generated by meshing the digital image pixels. Based on these grids a GMC (General Method of Cell) method is used to calculate the composite elastic properties. Then, the properties were analyzed by statistic method. The results show that the simulation methods accurately represent the stochastic fiber location. The discrepancy of elastic properties increased with the  $v_f$  (volume fraction of fiber) when the  $v_f$  is low and decreased with  $v_f$  when the  $v_f$  is high. The three-parameter Weibull pdf and Gaussian pdf describe the distributions of every elastic coefficient accurately.

**Key words:** aerospace propulsion system; composite; GMC efficient implementation; Monte-Carlo method; effective performances

复合材料的许多破坏失效现象(比如断裂)与复合材料的细观结构有密切关系。因为复合材料

的细观结构和组元材料的性能具有随机性, 所以导致复合材料的平均性能也表现出随机性<sup>[1]</sup>。这

收稿日期: 2004-07-26; 修订日期: 2005-01-13

基金项目: 航空科学基金资助(01C52017)

作者简介: 高希光(1981-), 男, 福建沙县人, 南京航空航天大学能源与动力学院博士生, 主要从事航空宇航推进系统结构、强度与振动研究

就要求对材料弹性性能的分布进行研究。文献[2]对纤维体积百分比的随机性进行研究。文献[3]研究了组分材料性能随机变化时, 复合材料宏观性能的分散性。然而对纤维位置随机变化引起的材料性能的分散性研究很少。大量实验表明纤维位置的随机变化对材料性能有很大影响, 所以有必要对其进行研究。

采用有限元法对代表体元进行应力应变场的分析, 然后根据均匀化理论获得复合材料的总体性能的有限元计算细观力学法是目前较为有效的方法<sup>[4]</sup>。然而, 任何细观结构的微小变化均将导致有限元网格的重新划分, 因此利用有限元计算细观力学法来研究细观结构对复合材料分散性影响在计算时间与效率上将有极大的障碍。由美国 NASA 在上个世纪 90 年代提出的通用单胞模型 (Generalized Method of Cell 以下简称 GMC) 已经得到巨大发展, 是一种快速有效的宏细观统一模型, 现在已经成为美国 NASA 先进复合材料结构应力分析的主要方法<sup>[5]</sup>。本文就是采用 Monte-Carlo 方法模拟复合材料纤维中心位置和纤维半径的随机变化产生一系列数字化样本, 并采用 GMC 模型的改进算法计算每一个样本的弹性参数, 通过分析这些参数, 得到了材料弹性性能的统计特性。最后采用相关系数优化法给出了各个参数的分布。计算结果表明三参数威布尔分布很好地描述了这些弹性参数的分布情况。

1 低阶二维 GMC 模型的改进算法

通用单胞方法基于如下假设:

(1) 纤维按某些统计规律周期分布, 如图 1 所示。这样只要考虑某个代表单元 (REV), 将这个单元划分为  $N_{\beta} \times N_{\gamma}$  个子胞 (如图 2 所示), 分析这个单元的应力/应变分布, 就可以得到整个应力/应变场。

(2) 胞内线性位移假设

假设第  $(\beta, \gamma)$  子胞内的位移为:

$$u_i^{(\beta \gamma)} = \epsilon_{ij}^0 x_j + \overline{x_2^{(\beta)}} \Phi_i^{(\beta \gamma)} + \overline{x_3^{(\beta \gamma)}} + \Psi_i^{(\beta \gamma)}$$

弱化的位移边界条件为:

$$\frac{1}{l_{\gamma}} \int_{l_{\gamma}/2}^{l_{\gamma}/2} u_i^{(\beta \gamma)} \left( \frac{h_{\beta}}{2}, \overline{x_3} \right) d \overline{x_3} = \frac{1}{l_{\gamma}} \int_{l_{\gamma}/2}^{l_{\gamma}/2} u_{i(\beta+1, \gamma)} \left( -\frac{h_{\beta+1}}{2}, \overline{x_3} \right) d \overline{x_3}$$

$(i = 1, 2, 3; \beta = 1, 2, \cdots, N_{\beta}; \gamma = 1, 2, \cdots, N_{\gamma})$

$$\frac{1}{h_{\beta}} \int_{h_{\beta}/2}^{h_{\beta}/2} u_i^{(\beta \gamma)} \left( \overline{x_2}, \frac{l_{\gamma}}{2} \right) d \overline{x_2} = \frac{1}{h_{\beta}} \int_{h_{\beta}/2}^{h_{\beta}/2} u_{i(\beta, \gamma+1)} \left( \overline{x_2}, -\frac{l_{\gamma+1}}{2} \right) d \overline{x_2}$$

(5a)

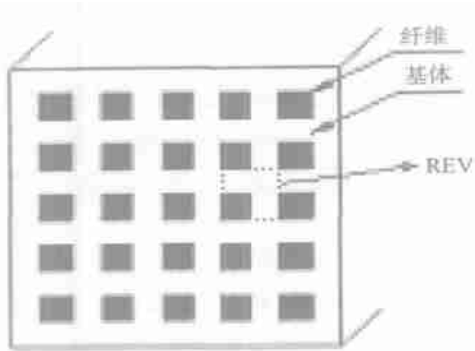


图 1 复合材料周期性细观结构  
Fig 1 Periodic structure of composite in microcosmic lever

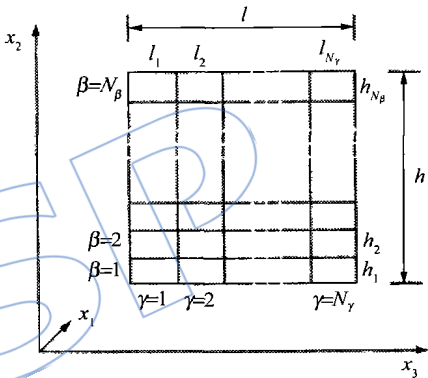


图 2  $N_{\beta} \times N_{\gamma}$  规模单元  
Fig 2 A representative volume element which contain  $N_{\beta} \times N_{\gamma}$  sub elements

$$i = 1, 2, 3 \tag{1}$$

其中  $\Phi_i^{(\beta \gamma)} \Psi_i^{(\beta \gamma)}$  为与子胞有关的常量。图 2 中  $x_1$  表示纤维伸展方向。在各子胞内建立局部坐标系  $(x_1, \overline{x_2^{(\beta)}} \overline{x_3^{(\gamma)}})$ 。子胞的平均应力、应变分别为  $\overline{\sigma^{(\beta \gamma)}}$  和  $\overline{\epsilon^{(\beta \gamma)}}$ , 子胞的本构方程:

$$\overline{\sigma^{(\beta \gamma)}} = C^{(\beta \gamma)} \overline{\epsilon^{(\beta \gamma)}} \tag{2}$$

复合材料的平均应力、应变为:

$$\overline{\sigma} = \frac{1}{hl} \sum_{\beta=1}^{N_{\beta}} \sum_{\gamma=1}^{N_{\gamma}} h_{\beta} l_{\gamma} \overline{\sigma^{(\beta \gamma)}} \tag{3}$$

$$\overline{\epsilon} = \frac{1}{hl} \sum_{\beta=1}^{N_{\beta}} \sum_{\gamma=1}^{N_{\gamma}} h_{\beta} l_{\gamma} \overline{\epsilon^{(\beta \gamma)}} \tag{4}$$

$(i = 1, 2, 3; \beta = 1, 2, \cdots, N_\beta; \gamma = 1, 2, \cdots, N_\gamma)$  (5b)

把式(1)带入到式(5)中,得到了弱化位移边界条件的具体表达式, 详见参考文献[6]。

以子胞应力为基本未知量, 其本构关系为:  
 $\epsilon^{(\beta\gamma)} = S^{(\beta\gamma)} \sigma^{(\beta\gamma)}$ , 对弱化的位移连续条件改造, 得到如下方程:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{22} \\ T_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ e \end{bmatrix} \bar{\epsilon}_1 + \begin{bmatrix} H \\ 0 \end{bmatrix} \bar{\epsilon}_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ L \end{bmatrix} \bar{\epsilon}_3 \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^{N_\beta} \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} h_\beta l_\gamma S_{66}^{(\beta\gamma)} T_{23} = h l \bar{\epsilon}_3 \quad (7)$$

$$\frac{1}{2} \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} l_\gamma S_{44}^{(\beta\gamma)} T_{13} = l \bar{\epsilon}_3 \quad (8)$$

$$\frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^{N_\beta} h_\beta S_{44}^{(\beta\gamma)} T_{12} = h \bar{\epsilon}_2 \quad (9)$$

其中A 为  $N_\gamma$  方阵, B 为  $N_\gamma \times N_\beta$  矩阵,  $B^T$  为  $N_\beta \times N_\gamma$  矩阵, D 为  $N_\beta$  阶方阵, c, e, H, L 分别为  $N_\gamma \times 1$ ,  $N_\beta \times 1$ ,  $N_\gamma \times 1$ ,  $N_\beta \times 1$  矩阵。矩阵  $T_{22}$  和  $T_{33}$  分别为:

$$T_{22} = [T_{22}^{1,1} \cdots T_{22}^{1,N_\gamma} \cdots T_{22}^{N_\beta,1} \cdots T_{22}^{N_\beta,N_\gamma}]^T \quad (10)$$

$$T_{33} = [T_{33}^{1,1} \cdots T_{33}^{1,N_\gamma} \cdots T_{33}^{N_\beta,1} \cdots T_{33}^{N_\beta,N_\gamma}]^T \quad (11)$$

$$\sigma_{22}^{(1,\gamma)} = \sigma_{22}^{(i,\gamma)} = \sigma_{22}^{(N_\beta,\gamma)} = T_{22}^{(\gamma)} \quad (12)$$

$$\sigma_{33}^{(\beta,1)} = \sigma_{33}^{(\beta,i)} = \sigma_{33}^{(\beta,N_\gamma)} = T_{33}^{(\beta)} \quad (13)$$

$T_{23}$ ,  $T_{13}$  和  $T_{12}$  分别为:

$$\sigma_{23}^{(\beta_1,\gamma_1)} = \sigma_{23}^{(\beta_2,\gamma_2)} = T_{23} \quad (14)$$

式中:

$$\beta_1, \beta_2 = 1, \cdots, N_\beta \quad \gamma_1, \gamma_2 = 1, \cdots, N_\gamma$$

$$\begin{aligned} \sigma_{13}^{(\beta,1)} &= \cdots = \sigma_{13}^{(\beta,i)} = \\ &\cdots = \sigma_{13}^{(\beta,N_\gamma)} = T_{13}^{(\beta)} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{12}^{(1,\gamma)} &= \cdots = \sigma_{12}^{(i,\gamma)} = \\ &\cdots = \sigma_{12}^{(N_\beta,\gamma)} = T_{12}^{(\gamma)} \end{aligned} \quad (16)$$

以应力为未知量, 由(6)~ (9) 式可以解出所有的应力分量。

$$\bar{\sigma}_1^{(\beta\gamma)} = a_1^{(\beta\gamma)} \bar{\epsilon}_1 + b_1^{(\beta\gamma)} \bar{\epsilon}_2 + c_1^{(\beta\gamma)} \bar{\epsilon}_3 \quad (17)$$

式中:  $\beta = 1, \cdots, N_\beta; \gamma = 1, \cdots, N_\gamma$

$$\bar{\sigma}_2^{(\beta\gamma)} = a_2^{(\gamma)} \bar{\epsilon}_1 + b_2^{(\gamma)} \bar{\epsilon}_2 + c_2^{(\gamma)} \bar{\epsilon}_3 \quad (18)$$

式中:  $\gamma = 1, \cdots, N_\gamma$

$$\bar{\sigma}_3^{(\beta\gamma)} = a_3^{(\beta)} \bar{\epsilon}_1 + b_3^{(\beta)} \bar{\epsilon}_2 + c_3^{(\beta)} \bar{\epsilon}_3 \quad (19)$$

式中:  $\beta = 1, \cdots, N_\beta$

$$\bar{\sigma}_3^{(\beta\gamma)} = b_6^{(\beta\gamma)} \bar{\epsilon}_3 \quad (20)$$

$$\bar{\sigma}_{13}^{(\beta\gamma)} = b_5^{(\beta)} \bar{\epsilon}_3 \quad (\beta = 1, \cdots, N_\beta) \quad (21)$$

$$\bar{\sigma}_{12}^{(\beta\gamma)} = b_4^{(\gamma)} \bar{\epsilon}_2 \quad (\gamma = 1, \cdots, N_\gamma) \quad (22)$$

将式(17)~ (22) 代入式(3) 就可以得到  $\bar{\sigma} = C \bar{\epsilon}$

## 2 纤维位置随机的计算机模拟

研究复合材料各项弹性性能统计特性最可靠的方法是实验, 但是要得到比较准确的统计结果, 需要大量的样本, 费用昂贵, 本文采用计算机模拟的办法。先假设纤维位置的随机变化规律, 使用 Monte-Carlo 生成多个复合材料的数字化样本, 然后使用 GMC 模型分别计算出各个样本材料的刚度矩阵, 将刚度矩阵换算为需要的弹性参数。最后使用数理统计的方法对计算结果进行研究得到材料弹性参数的概率密度分布图。

在对材料截面进行模拟之前先要做如下假设:

- (1) 材料中各个组分是各向同性材料。
- (2) 组分材料的弹性参数为定值, 不具有随机性。只有纤维中心位置发生随机变化。
- (3) 基体与纤维之间为理想结合, 不存在界面与开裂, 整个材料是一个完整的连续体。

表 1 列出了本文复合材料组分的弹性模量和泊松比。

表 1 各组分的弹性参量

Table 1 Elastic module and Poisson's ratio of fiber and matrix

|    | E/GPa | $\mu$ |
|----|-------|-------|
| 纤维 | 380   | 0.25  |
| 基体 | 75    | 0.30  |

采用 Monte-Carlo 模拟纤维中心位置的随机分布。复合材料在设计时, 其纤维的中心位置的分布都具有一定的规律。比如四方形排列、矩形排列、方形对角排列和纤维六角形排列等<sup>[5]</sup>。假设纤维中心的位置在设计位置附近随机分布。偏移量  $dx$  和  $dy$  是独立的服从某种分布的随机变量, 见图 3。图 3 所示截面为圆形纤维方形排列。图中阴影部分代表纤维, 白色部分代表基体。图中纤维边界为虚线的代表纤维的设计位置, 纤维位置偏移量为  $dx$  和  $dy$ 。

为了便于说明问题, 本文分别采用均匀分布和正态分布来模拟纤维中心位置的随机变化。实际应用中可以选择适合实际情况的分布函数。

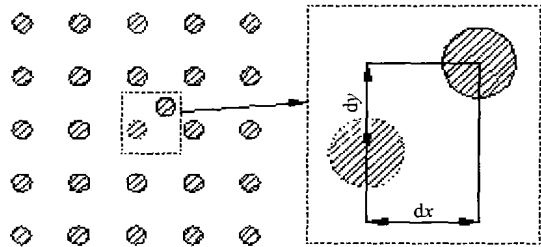


图 3 纤维的位置随机

Fig. 3 The position of fiber is a random variable

2.1 均匀分布模拟纤维位置随机

采用均匀分布模拟纤维位置随机变化时, 纤维中心位置的偏移量  $dx, dy$  分别在  $[X_1, X_2]$  和  $[Y_1, Y_2]$  内均匀分布。图 4 是采用均匀分布模拟纤维位置随机的模拟截面效果图, 图 5 是实际材料截面的照片<sup>[6]</sup>, 从两图的对比可以看出模拟的效果已经相当接近实际的纤维分布。

2.2 正态分布模拟纤维位置随机

采用正态分布模拟纤维位置随机变化时, 纤维中心位置的偏移量  $dx, dy$  分别在  $[X_1, X_2]$  和  $[Y_1, Y_2]$  内正态分布。

纤维中心位置的偏移量  $dx$  和  $dy$  是 2 个独立的随机变量。分别服从  $N(\mu_1, \sigma_1)$  和  $N(\mu_2, \sigma_2)$  的分布。通常  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ 。图 6 为模拟截面图。

当各种各样的模型作为 GMC 模型的输入时, 需要对模型划网格。GMC 模型使用矩形网格, 当图形比较复杂时, 为了避免划分网格带来的困难, 可以使用像素作为 GMC 模型的子胞。这样不仅可以直接利用已有的数字化图像, 而且利用像素划分网格将使每一个子胞的大小相同。这样计算过程中(6)式的  $\begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix}$  成为一个实对称矩阵, 从而可以利用实对称矩阵的特点简化计算过程, 提高计算速度。

现在回过头来讨论 GMC 模型的基本假设。GMC 模型的结论是在周期性条件下得到的。这里的周期性条件是指“几何周期性”和“周期边界条件”。这两个基本假设要求代表体元在材料的截面中周期出现, 并且代表体元的位移边界条件和应力边界条件也是周期出现的。但是在以上的讨论中, 模拟的截面并不严格满足这两个周期性条件。这会带来一定的误差。但是文献[7]的分析表明, 即使不严格满足 GMC 模型的假设, 它仍然可以较精确地计算出材料的横向响应。从而得到材

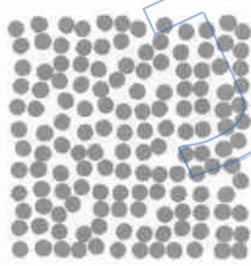


图 4 模拟截面的效果图  
Fig. 4 The simulated picture

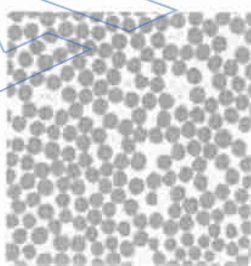


图 5 实际截面照片  
Fig. 5 The actual picture

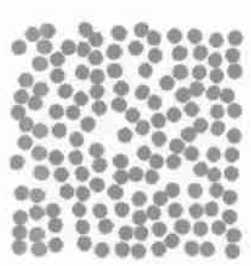


图 6 正态分布模拟纤维分布  
Fig. 6 The simulated picture

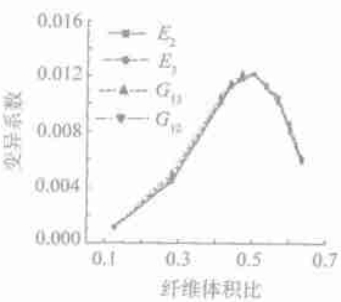


图 7  $E_2, E_3, G_{13}$  和  $G_{12}$  的变异系数变化  
Fig. 7 The coefficient of variation of  $E_2, E_3, G_{13}$  and  $G_{12}$

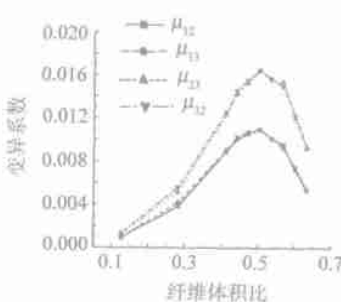


图 8  $\mu_{12}, \mu_{13}, \mu_{23}$  和  $\mu_{32}$  的变异系数随  $V_f$  的变化  
Fig. 8 The coefficient of variation of  $\mu_{12}, \mu_{13}, \mu_{23}$  and  $\mu_{32}$

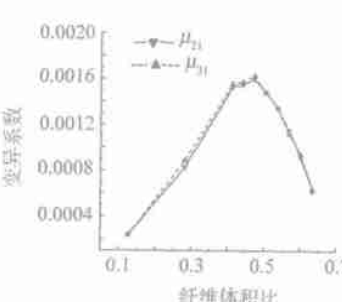


图 9  $\mu_{21}$  和  $\mu_{31}$  的变异系数随的变化  
Fig. 9 The coefficient of variation of  $\mu_{21}$  and  $\mu_{31}$

料的宏观弹性参数,因此本文的计算结果具有足够的精度。

3 复合材料有效性能统计特性研究

3.1 纤维位置均匀分布下材料有效性能统计特性

本节使用表 1 材料作为模拟的组分材料。定义: 变异系数= 均方差/均值。变异系数真实地反映了分散性的大小。当纤维半径取不同的数值时, 模拟并计算得到各个弹性参量变异系数随纤维体积比的变化曲线(见图 7~ 图 9)。从图 7~ 图 9 可以看出由纤维位置随机引起的材料性能的分散性随纤维体积比的变化规律是一个从小到大再到小的曲线。这时因为当纤维体积比较小时, 尽管纤维中心位置波动的范围较大, 但是由于纤维在复合材料中的百分比较小, 所以导致这种波动的影响较小。当纤维体积比较大时, 虽然纤维在材料中的百分比较大, 但是, 由于纤维之间的距离都较小, 所以纤维偏离中心位置的范围也较小。只有当

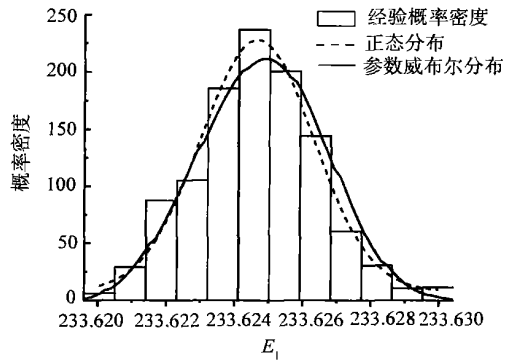


图 10  $E_1$  的概率密度分布图

Fig 10 The pdf of  $E_1$

纤维体积比到达一个恰当的数值时, 纤维的位置的随机性的影响才能显著地反映出来。本文没有列出  $E_1$  和  $G_{23}$  的变化曲线, 是因为  $E_1$  和  $G_{23}$  几乎不受纤维位置的影响。因此它们的变异系数接近于零。

为了研究当纤维位置平均分布时, 材料性能的分布规律, 本文采用 GMC 模型计算得到一系列材料弹性参数。拟合得到各弹性参量的概率密

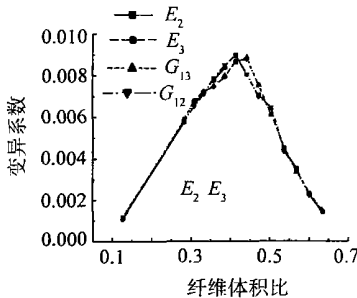


图 11  $E_2$ ,  $E_3$ ,  $G_{13}$  和  $G_{12}$  的变异系数变化

Fig 11 The coefficient of variation of  $E_2$ ,  $E_3$ ,  $G_{13}$  and  $G_{12}$

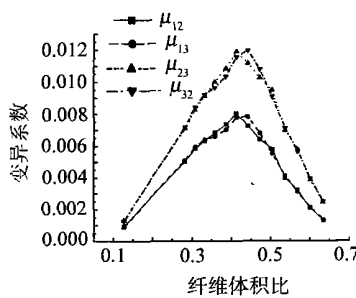


图 12  $\mu_{12}$ ,  $\mu_{13}$ ,  $\mu_{23}$  和  $\mu_{32}$  的变异系数随  $V_f$  的变化

Fig 12 The coefficient of variation of  $\mu_{12}$ ,  $\mu_{13}$ ,  $\mu_{23}$  and  $\mu_{32}$

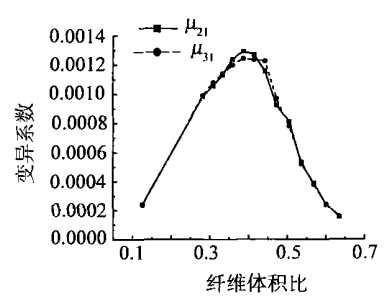


图 13  $\mu_{21}$  和  $\mu_{31}$  的变异系数随  $V_f$  的变化

Fig 13 The coefficient of variation of  $\mu_{21}$  and  $\mu_{31}$

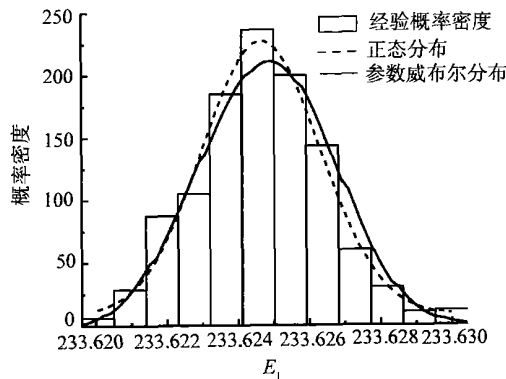


图 14  $E_1$  的概率密度分布图

Fig 14 The pdf of  $E_1$

度函数分布图。 $E_1$  的分布图如图 10。其他弹性参数的分布图与图 10 类似。

3.2 纤维位置正态分布下材料有效性能统计特性

仍然将组分材料弹性参数设为表 1 中的数值。用 GMC 模型计算出不同体积比下各个弹性参量的变异系数。变异系数的计算结果见图 11~ 图 13。由与 4.1 节类似的分析可以知道随着纤维体积比的变化, 各个弹性参数的分散性由小增大再变小。

采用相关系数法拟合得到  $E_1$  的概率密度函数分布图(见图 14)。其他弹性参数的分布图与图

14 类似。

4 结 论

分析结果表明:

- (1) 不论用均匀分布还是用正态分布模拟纤维中心位置的随机变化, 都可以达到较理想的效果。材料截面模拟图与实际截面图象比较接近。
- (2) 由纤维位置变化引起的材料分散性随纤维体积比先增大然后减小。 $V_f$  在 0.3~0.6 之间, 变异系数存在极大值。
- (3) 三参数威布尔分布和正态分布较好地描述了各弹性参数的分布。

参考文献

[1] Graham L L, Gurleyb K, Masters F. Non-Gaussian Simulation of Local Material Properties Based on a Moving Window Technique [J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2003, 18: 223~234

[2] 范建华, 杨庆雄. 复合材料弹性模量随机计算模型[J]. *复合材料学报*, 1998, 15(4): 134~138

Fan Jianhua, Yang Qingxiong. Composites Modules Calculated by Random Fiber Distribution Method [J]. *Acta Materialiae Compositae Sinica*, 1998, 15(4): 134~138

[3] 宋迎东, 孙志刚, 高希光. 纤维增强复合材料有效性能分散性的研究[J]. *航空动力学报*, 2005, 20(2): 230~235

SONG Ying-dong, SUN Zhi-gang, GAO Xi-guang. Research on Discrepancy of Fiber Reinforced Composite Effective Performance [J]. *Journal of Aerospace Power*, 2005, 20(2): 230~235

[4] 方岱宁, 周储伟. 有限元计算细观力学对复合材料力学行为的数值分析[J]. *力学进展*, 1998, 28(2): 173~188

Fang Daining, Zhou Chuwei. Numerical Analysis of the Mechanics Behavior of Composites by Finite Element Micromechanics Method [J]. *Advances in Mechanics*, 1998, 28(2): 173~188

[5] 雷友锋. 纤维增强金属基复合材料宏—细观统一本构模型及应用研究[D]. 江苏 南京: 南京航空航天大学, 2002

[6] 孙志刚, 宋迎东, 高希光, 等. 细观结构对复合材料热膨胀系数的影响研究[J]. *应用力学学报*, 2004, 21(2): 146~150

Sun Zhigang, Song Yingdong, Gao Xiguang, et al. Influence of Micro-Structural Geometry on Thermal Expansion Coefficient [J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2004, 21(2): 146~150

[7] Characterization of Local Response of Random Heterogeneous Materials Using Moving Window GMC and Finite Element Analysis [R]. by Siragy, Eman Farouk, PhD, UNIVERSITY OF VIRGINIA, 2002, 131 Pages, AA T 3057455

[8] 宋迎东, 雷友锋, 高德平, 等. 通用单胞法模型预测纤维增强钛基复合材料弹性性能[A]. 第十届航空发动机结构强度与振动会议征文集[C]. 安徽歙县: 2000: 137~141.

[9] Xiaoming Chen, Papathanasiou T D. Interface Stress Distributions in Transversely Loaded Continuous Fiber Composites: Parallel Computation in Multi-Fiber RVEs Using the Boundary Element Method [J]. *Composites Science and Technology* 64, 2004: 1101~1114

[10] 傅惠民, 高镇同. 确定威布尔分布三参数的相关系数优化法[J]. *航空学报*, 1990, 11(7): 323~327.

FU Huimin, GAO Zhen-tong. Optimization Method for Determination of Coefficients of 3-Parameter Weibull Distribution [J]. *Acta Aeronautica Et Astronautica Sinica*, 1990, 11(7): 323~327.

[11] Aboudi J. Mechanics of Composite Materials- A Unified Micromechanical Approach [R]. Elsevier, Amsterdam, 1991.